

Классическое решение смешанной задачи для одномерного волнового уравнения с частной производной в условиях Коши

В. И. Корзюк, И. С. Козловская, С. Н. Наумовец (Беларусь)

В замыкании $\bar{Q} = [0, \infty) \times [0, l]$ области двух независимых переменных $\mathbf{x} = (x_0, x_1) \in \bar{Q} \subset \mathbb{R}^2$ рассмотрим одномерное волновое уравнение

$$\partial_{x_0}^2 u - a^2 \partial_{x_1}^2 u = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \bar{Q}, \quad (1)$$

где a^2, l - положительные действительные числа, $\partial_{x_0}^2, \partial_{x_1}^2$ - частные производные по x_0 и x_1 второго порядка. К уравнению (1) присоединяются условия Коши

$$u(0, x_1) = \varphi(x_1), \quad \partial_{x_0} u(0, x_1) = \psi(x_1), \quad x_1 \in [0, l], \quad (2)$$

и граничные условия

$$\partial_{x_1} u(x_0, 0) = \mu^{(1)}(x_0), \quad x_0 \in [0, \infty), \quad u(x_0, l) = \mu^{(2)}(x_0), \quad x_0 \in [0, \infty) \quad (3)$$

Функции $f, \varphi, \psi, \mu^{(j)}, j = 1, 2$ удовлетворяют следующим неоднородным условиям согласования:

$$\mu^{(1)}(0) - \varphi'(0) = \delta^{(1)}, \quad \frac{1}{a} \left(\psi'(0) - \mu^{(1)'}(0) + f(0, 0) \right) = \delta^{(2)}, \quad (4)$$

$$\mu^{(2)}(0) - \varphi(l) = \sigma^{(1)}, \quad \frac{1}{a} \left(\mu^{(2)'}(0) - \psi(l) \right) = \sigma^{(2)},$$

$$\frac{1}{a^2} \left(\mu^{(2)''}(0) - a^2 \varphi''(l) - f(0, l) \right) = \sigma^{(3)} \quad (5)$$

где $\varphi', \psi', \mu^{(j)'} -$ производные первого порядка функций $\varphi, \psi, \mu^{(j)} j = 1, 2, \varphi'', \mu^{(2)''} -$ вторые производные функций φ и $\mu^{(2)}$.

Теорема 1. Пусть функции $\varphi \in C^2[0, l], \psi \in C^1[0, l], f \in C^{0,1}(\bar{Q}), \mu^{(j)} \in C^2[0, \infty), j = 1, 2$. Тогда функция $u = u^{(0)} + v$ является единственным классическим решением из класса $C^2(\bar{Q})$ задачи (1) – (3) тогда и только тогда, когда выполняются однородные условия согласования (4), (5), где функция v определяется формулами

$$v(\mathbf{x}) = \int_0^{x_0} w(x_0 - \tau, \tau, x_1) d\tau,$$

где

$$w(x_0 - \tau, \tau, x_1) = G^{(1)}(x_1 - ax_0, \tau) + G^{(2)}(x_1 + ax_0, \tau)$$

$$G^{(j)}(z, \tau) = \begin{cases} G^{(j,0)}(z, \tau), & z \in [0, l], \tau \in [0, \infty), \\ G^{(j,l)}(z, \tau), & z \in D(g^{(j)}) \setminus [0, l], \tau \in [0, \infty) \end{cases}$$

$$j = 1, 2; D(g^{(1)}) = (-\infty, l], D(g^{(2)}) = [0, \infty),$$

$$G^{(j,0)}(z, \tau) = \frac{(-1)^j}{2a} \int_0^z f(\tau, \xi) d\xi, z \in [0, l], j = 1, 2,$$

$$G^{(1,1)}(z, \tau) = -\frac{1}{2a} f(\tau, 0) \cdot z - \frac{1}{4a} f(\tau, z)|_{x=0} \cdot z^2$$

$$G^{(2,1)}(z, \tau) = \frac{1}{2a} \int_0^l f(\tau, \xi) d\xi + \frac{1}{2a} f(\tau, l)(z - l) + \frac{1}{4a} \partial_z f(\tau, z)|_{z=l} \cdot (z - l)^2,$$

а $u^{(0)}$ при условии, что $\tilde{C}^{(k)} = -C$, $k = 1, 2, \dots$ определяется следующим образом

$$u^{(0)}(x) = g^{(1)}(x_1 - ax_0) + g^{(2)}(x_1 + ax_0),$$

где функции $g^{(j)}(j = 1, 2)$ из класса $C^2(D(g^{(j)}))$. $(D(g^{(j)})) = (-\infty, l]$,

$$g^{(j)}(z) = g^{(j,0)}(z) = \frac{1}{2} \varphi(z) + (-1)^j \frac{1}{2a} \int_0^z \varphi(\xi) d\xi + (-1)^j C,$$

$$g^{(1)}(z) = g^{(1,k)}(z) = \int_0^z \tilde{\mu}^{(1)} \left(-\frac{\xi}{a} \right) d\xi + g^{(2,k-1)}(-z) + 2\tilde{C}^{(k)},$$

$$z \in [-kl, -(k-1)l], k = 1, 2, \dots,$$

$$g^{(2)}(z) = g^{(2,k)}(z) = \tilde{\mu}^{(2)} \left(\frac{z-l}{a} \right) + g^{(1,k-1)}(2l-z), z \in [kl, (k+1)l], k = 1, 2, \dots$$

Литература

1. В.И. Корзюк, И.С. Козловская, С.Н. Наумовец Классическое решение первой смешанной задачи одномерного волнового уравнения с условиями типа Коши. *Вест. Нац. акад. наук Беларуси*. Сер.физ.-мат. наук. № 1(2015), 7-20.
2. В.И. Корзюк, И.С. Козловская Решение задачи Коши для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами в случае двух независимых переменных. *Дифференциальные уравнения*. Т. 48, № 5(2012), 700-709
3. В.И. Корзюк, И.С. Козловская Решение задачи Коши гиперболического уравнения для однородного дифференциального оператора в случае двух независимых переменных. *Доклады НАН Беларуси*. Т. 55, № 5(2011), 9-13.
4. В.И. Корзюк, Е. С. Чеб, М. С. Ширма Решение первой смешанной задачи для волнового уравнения методом характеристик. *Труды Ин-та математики НАН Беларуси*. Т. 17, № 2(2009), 23-34.